DOCENTE: Vincenzo Pappalardo
MATERIA: Matematica

Teoremi del Calcolo Differenziale

Verso l'Esame di Stato

ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
CORSO DI ORDINAMENTO • 2001
Sessione ordinaria

5 Sia $f(x)$ una funzione reale di variabile reale, derivabile in un intervallo $[a, b]$ e tale che, per ogni x di tale intervallo, risulti $f'(x) = 0$. Dimostrare che $f(x)$ è costante in quell'intervallo.

soluzione

5 Si prenda un punto $x \in [a; b]$. Nell'intervallo $[a; x]$ la funzione soddisfa il Teorema di Lagrange cioè esiste almeno un punto $c \in]a; x[$ tale che:

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(c).$$

Per ipotesi $f'(c) = 0$, pertanto $f(x) - f(a) = 0$, cioè $f(x) = f(a)$ per ogni $x \in [a; b]$. La funzione è quindi costante nell'intervallo di definizione.

ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
CORSO DI ORDINAMENTO • 2001
Sessione ordinaria

10 Si consideri la funzione $\frac{x+\operatorname{sen} x}{x-\cos x}$. Stabilire se si può calcolarne il limite per $x \to +\infty$ e spiegare se il calcolo può essere effettuato ricorrendo al teorema di De L'Hospital.

soluzione

10 Dato il limite $\lim_{x\to+\infty} \frac{x+\operatorname{sen} x}{x-\cos x}$, si raccoglie x al numeratore e al denominatore della frazione:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x+\operatorname{sen} x}{x-\cos x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(1+\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)}{x\left(1-\frac{\cos x}{x}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(1+\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)}{\left(1-\frac{\cos x}{x}\right)}.$$

Poiché $-1 \le \operatorname{sen} x \le 1$ e quindi $-\frac{1}{x} \le \frac{\operatorname{sen} x}{x} \le \frac{1}{x}$, per il teorema del confronto vale $\lim_{x\to+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 0$.

Allo stesso modo si dimostra che $\lim_{x \to +\infty} \frac{\cos x}{x} = 0$. Pertanto esiste il limite:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x + \operatorname{sen} x}{x - \cos x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\left(1 + \frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)}{\left(1 - \frac{\cos x}{x}\right)} = 1.$$

Alla luce del teorema di De L'Hospital, volendo trattare il limite $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$, una delle condizioni dell'ipotesi è che deve esistere un valore M tale che, $\forall x > M$, le funzioni $f(x)$ e $g(x)$ siano derivabili e $g'(x) \neq 0$. Nel caso in questione $g(x) = x - \cos x$ e $g'(x) = 1 + \operatorname{sen} x$. Si osserva che la derivata prima si annulla per $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ con k intero e quindi non esiste un intorno di $+\infty$ in cui valga sempre $g'(x) \neq 0$. Pertanto il teorema non può essere applicato.

ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
CORSO DI ORDINAMENTO • 2002
Sessione ordinaria

8 La funzione reale di variabile reale è continua nell'intervallo chiuso e limitato $[1; 3]$ e derivabile nell'intervallo aperto $]1, 3[$. Si sa che $f(1)=1$ e inoltre $0 \leq f'(x) \leq 2$ per ogni x dell'intervallo $]1; 3[$. Spiegare in maniera esauriente perché risulta $1 \leq f(3) \leq 5$.

soluzione

8 Poiché sono soddisfatte le ipotesi del teorema di Lagrange, esiste un punto $c \in]1; 3[$ tale che:

$$f'(c)=\frac{f(3)-f(1)}{3-1}=\frac{f(3)-1}{2}.$$

Essendo $0 \leq f'(x) \leq 2$, risulta $0 \leq \dfrac{f(3)-1}{2} \leq 2$, e quindi $1 \leq f(3) \leq 5$.

5 Dimostrare il seguente teorema: «Condizione sufficiente ma non necessaria affinché la funzione reale di variabile reale $f(x)$ sia continua nel punto a è che sia derivabile in a».

soluzione

5 Si vuole dimostrare che, data una funzione reale di variabile reale $f(x)$, se essa è derivabile nel punto $x = a$, allora è in esso continua. Per definizione di derivata di una funzione nel punto $x = a$, esiste ed è finito il limite del rapporto incrementale: $\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(h)}{h} = f'(a)$. Si consideri l'identità $f(a+h) = f(a) + \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \cdot h$. Si calcoli il limite per $h \to 0$ del secondo membro:

$$\lim_{h \to 0} \left[f(a) + \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \cdot h \right] = \lim_{h \to 0} f(a) + \lim_{h \to 0} \left[\frac{f(a+h) - f(a)}{h} \cdot h \right] = f(a) + f'(a) \cdot 0 = f(a).$$

Poiché i membri dell'identità sono uguali, si può dedurre che esiste il limite $\lim_{h \to 0} f(a+h)$ e vale:

$$\lim_{h \to 0} f(a+h) = f(a).$$

Posto $a + h = x$, se $h \to 0$ si ha che $x \to a$.

Sostituendo nella precedente espressione:

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a),$$

pertanto la funzione è continua nel punto $x = a$.

In generale non vale il viceversa, cioè non è detto che una funzione continua in un punto è in esso derivabile. Per esempio, la funzione $f(x) = |x|$ è continua nel punto $x = 0$ ma non è derivabile; infatti $\lim_{x \to 0} |x| = |0| = 0$ ma $f'_-(0) = -1$, mentre $f'_+(0) = 1$.

6 Verificate che le due funzioni $f(x) = 3\log x$ e $g(x) = \log(2x)^3$ hanno la stessa derivata. Quale giustificazione ne date?

soluzione

6 In base alle proprietà dei logaritmi si può trasformare $g(x)$ come segue:

$$g(x) = \log(2x)^3 = 3\log(2x) = 3\log 2 + 3\log x = 3\log 2 + f(x)$$

Pertanto $g(x)$ e $f(x)$ differiscono solamente per la costante $3\log 2$ e avranno quindi la stessa derivata: $g'(x) = f'(x) = \dfrac{3}{x}$.

ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
CORSO DI ORDINAMENTO • 2004
Sessione suppletiva

3 Sia $F(x)$ una funzione reale di variabile reale derivabile in un punto a. Si sa che se $F'(a) > 0$ allora $F(x)$ è crescente in a, mentre se $F'(a) < 0$ allora $F(x)$ è decrescente in a. Dimostrare che condizione sufficiente ma non necessaria affinché $F(x)$ ammetta in a un massimo relativo è che risulti $F'(a) = 0$ ed $F''(a) < 0$.

soluzione

3 Dal testo del quesito si deduce che F è derivabile almeno 2 volte nel punto a. Essendo $F''(a) < 0$ si ha che $\lim_{x \to a} \frac{F'(x) - F'(a)}{x - a} = F''(a) < 0$ e quindi, per il teorema della permanenza del segno, esiste un intorno I di a tale che, per ogni $x \in I$ il rapporto incrementale $\frac{F'(x) - F'(a)}{x - a}$ è negativo, cioè numeratore e denominatore hanno segno discorde, e quindi si verifica: $x < a \Rightarrow F'(x) > F'(a)$ e $x > a \Rightarrow F'(x) < F'(a)$. Essendo per ipotesi $F'(a) = 0$, si ha che per ogni $x \in I$, $x < a \Rightarrow F'(x) > 0$ e $x > a \Rightarrow F'(x) < 0$, ma, poiché F è continua e derivabile in a, questa è una condizione sufficiente affinché a sia punto di massimo relativo.

ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
CORSO DI ORDINAMENTO • 2005
Sessione straordinaria

7 Determinare il dominio di derivabilità della funzione $f(x) = |x^2 - 1|$

soluzione

7 La funzione $f(x) = |x^2 - 1|$ ha campo di esistenza reale e può essere scritta come:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{per } x \leq -1 \vee x \geq 1 \\ -x^2 + 1 & \text{per } -1 < x < 1 \end{cases}.$$

Essa è continua nei punti $x = -1$ e $x = 1$, poiché $\lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^+} f(x) = 0$ e $\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x) = 0$, ed è quindi continua su tutto $\mathbb{R}$.
Si calcola ora la derivata di $f(x)$ per $x \neq \pm 1$ con le regole di derivazione:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{per } x < -1 \vee x > 1 \\ -2x & \text{per } -1 < x < 1 \end{cases}.$$

Si osserva che nei punti $x = -1$ e $x = 1$, i limiti sinistri e destri della funzione $f'(x)$ non coincidono. Infatti:

$$\lim_{x \to -1^-} f'(x) = -2 \qquad \lim_{x \to -1^+} f'(x) = 2;$$
$$\lim_{x \to 1^-} f'(x) = -2 \qquad \lim_{x \to 1^+} f'(x) = 2.$$

Si può allora concludere che la funzione $f(x) = |x^2 - 1|$ è derivabile in $\mathbb{R}$ escluso nei punti $x = -1$ e $x = 1$.

ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
CORSO DI ORDINAMENTO • 2005

10 Si dimostri, calcolandone la derivata, che la funzione $f(x) = \operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg}\dfrac{x-1}{x+1}$ è costante, indi si calcoli il valore di tale costante.

soluzione

10 Il campo di esistenza della funzione è $\mathbb{R} - \{-1\}$.
Calcoliamo la derivata:

$$D\left[\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\right] = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+\dfrac{(x-1)^2}{(x+1)^2}} \cdot \frac{(x+1-x+1)}{(x+1)^2} =$$

$$= \frac{1}{1+x^2} - \frac{2(x+1)^2}{2(1+x^2)(x+1)^2} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0.$$

Avendo derivata nulla la funzione è costante, nei tratti in cui è definita. Per trovare le costanti basta sostituire un valore qualsiasi alla x per ognuno degli intervalli di esistenza, per esempio 0 e -2.

$$\operatorname{arctg} 0 - \operatorname{arctg}(-1) = 0 - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4}$$

$$\operatorname{arctg}(-2) - \operatorname{arctg}(3) = -\frac{3}{4}\pi.$$

ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
CORSO DI ORDINAMENTO • 2006

7 La funzione $f(x) = x^3 - 2x^2$ soddisfa le condizioni del teorema di *Lagrange* nell'intervallo [0; 1]? Se sì trova il punto ξ che compare nella formula: $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi)$.

soluzione

7 La funzione è polinomiale, quindi è continua nell'intervallo chiuso [0; 1] e derivabile nell'intervallo aperto]0; 1[. Pertanto verifica le ipotesi del teorema di Lagrange.
Calcoliamo:

$$f'(x) = 3x^2 - 4x,$$

$$f(0) = 0,$$

$$f(1) = 1 - 2 = -1.$$

Sostituiamo nella formula $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi)$ e otteniamo:

$$\frac{-1-0}{1}=3x^2-4x \quad \to \quad -1=3x^2-4x.$$

Risolviamo l'equazione:

$$3x^2-4x+1=0 \quad \Rightarrow \quad x=\frac{2\pm\sqrt{4-3}}{3}=\frac{2\pm1}{3},$$

quindi $x=1$ oppure $x=\dfrac{1}{3}$. Ne consegue che $\xi=\dfrac{1}{3}$ poiché interno all'intervallo [0; 1], mentre $x=1$, poiché è un estremo dell'intervallo, non soddisfa il teorema di Lagrange.

ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
CORSO DI ORDINAMENTO • 2006

9 Della funzione $f(x)$ si sa che è derivabile e diversa da zero in ogni punto del suo dominio e, ancora, che: $f'(x) = f(x)$ e $f(0) = 1$. Puoi determinare $f(x)$?

soluzione

9 Una funzione reale f, diversa da zero in ogni punto del suo campo di esistenza, che soddisfa la condizione $f'(x) = f(x)$ è la funzione esponenziale $f(x) = ke^x$, con k reale. Imponendo la condizione $f(0) = 1$, risulta: $k = 1$ e $f(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$.

Qualora si abbiano competenze sulle equazioni differenziali, si può risolvere il problema considerando l'equazione $\frac{dy}{dx} = y$.

Separiamo le variabili:

$$\frac{dy}{y} = dx \quad \rightarrow \quad \ln|y| = x + c \quad \rightarrow \quad y = ke^x \text{ con } k \text{ reale.}$$

Imponendo la condizione $y(0) = 1$, risulta $y = e^x$.

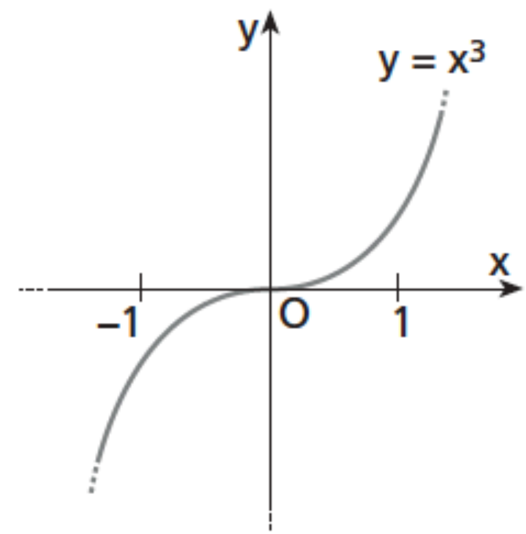
5 Sia data la funzione

$f\colon A \to \mathbb{R}$ con A sottoinsieme proprio di $\mathbb{R}$, f derivabile $\forall x \in A$.

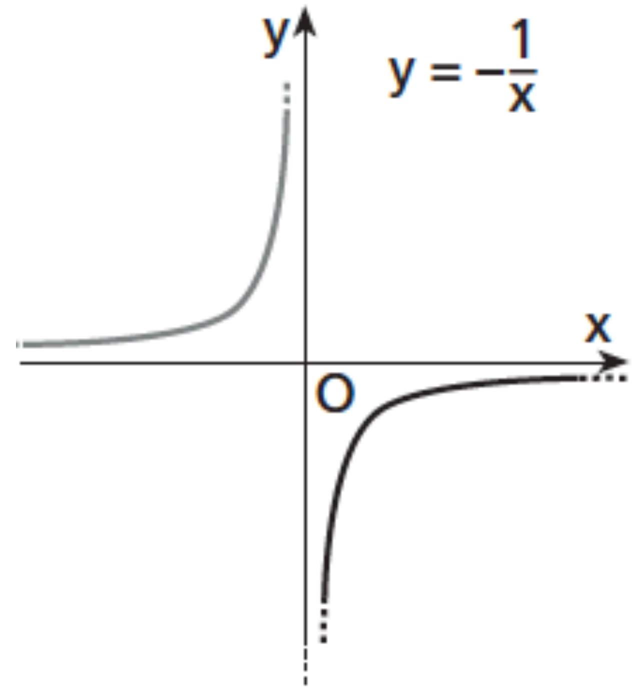
Discuti la verità della seguente proposizione dando esauriente motivazione e riferendo almeno un esempio:
«condizione necessaria e sufficiente affinché f sia crescente (decrescente) su A è che risulti
$f'(x) > 0 \quad (f'(x) < 0)\ \forall x \in A$».

soluzione

5 Una funzione $f\colon A \to \mathbb{R}$ si dice crescente su A se $\forall x_1, x_2 \in A$, con $x_1 < x_2$, si ha $f(x_1) < f(x_2)$.
La funzione f, derivabile in A, può essere crescente su A e avere derivata nulla in qualche punto. Per esempio la funzione $f(x) = x^3$, $x \in [-1; 1]$, è crescente sull'intervallo $[-1; 1]$ ma $f'(0) = 0$ (figura 11.a). Pertanto la condizione $f'(x) > 0\ \forall x \in A$ non è necessaria.



Se la derivata di f è positiva $\forall x \in A$ può tuttavia accadere che $f(x_1) > f(x_2)$ per qualche $x_1, x_2 \in A$, $x_1 < x_2$. Per esempio la funzione $f(x) = -\dfrac{1}{x}$, $x \in (\mathbb{R} - \{0\})$, è derivabile in tutto il dominio però $f(-1) > f(1)$ pur essendo $-1 < 1$ (figura 11.b). Questa funzione è crescente nei due sottoinsiemi disgiunti $\mathbb{R}^-$ ed $\mathbb{R}^+$ ma non su $(\mathbb{R} - \{0\})$. Pertanto la condizione $f'(x) > 0$ $\forall x \in A$ non è sufficiente.
La proposizione è dunque falsa.



9 Dimostra la seguente proposizione:

«Se f è una funzione strettamente positiva, derivabile in tutto il suo dominio e tale che, $f'(x) = f(x) - [f(x)]^2$, allora la funzione reciproca $f_1(x) = \dfrac{1}{f(x)}$ soddisfa la seguente relazione:

$$f_1'(x) + f_1(x) = 1».$$

Se eliminiamo l'ipotesi «strettamente positiva» la proposizione è ancora vera?

soluzione

9 Dalle ipotesi su f deduciamo immediatamente che f_1 esiste per tutti i punti del dominio di f; inoltre:

$$f_1'(x) = -\frac{1}{[f(x)]^2} f'(x).$$

Pertanto, poiché per ipotesi è $f'(x) = f(x) - [f(x)]^2$, si ha:

$$f_1'(x) + f_1(x) = -\frac{f(x) - [f(x)]^2}{[f(x)]^2} + \frac{1}{f(x)} = -\frac{1}{f(x)} + 1 + \frac{1}{f(x)} = 1 \qquad \text{c.v.d.}$$

Se eliminiamo l'ipotesi «strettamente positiva» la proposizione non è vera perché la funzione f_1 non esiste per quegli x tali che $f(x) = 0$. Naturalmente la proposizione rimane valida se la funzione data è strettamente negativa.